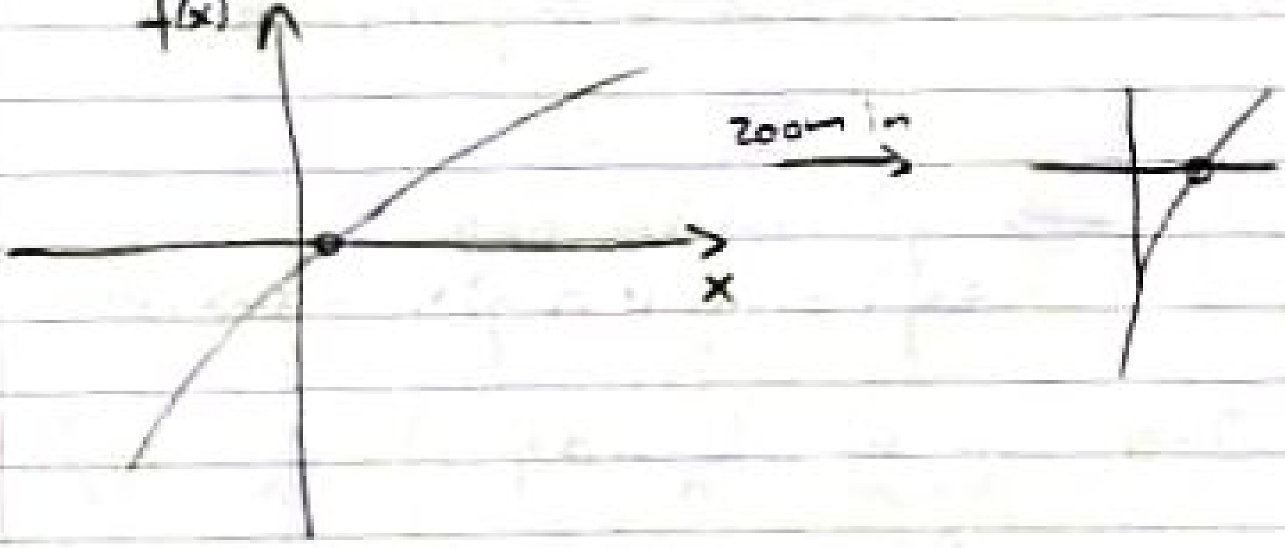
Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Σκοπός: Δίνεται μια συνάρτηση f και ζητάμε να βρούμε αριθμητικά (να προσεγγίσουμε) τις ρίζες της. ΔΛδ ζητάμε να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0$$

- Αν η f είναι πολυώνυμο μέχρι και τετάρτου βαθμού μπορώ να υπολογίσω τις ρίζες του. Γενικά δεν υπάρχουν τύποι/τρόποι να υπολογιστούν οι ρίζες πολυωνύμων ανώτερης τάξης.

Τρόποι αντιμετώπισης - Αριθμητική προσέγγιση



Ζητώ μια ακολουθία ριζών/προσεγγίσεων $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ώστε $f(x_n) \to 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$

Υπο κατάλληλες συνθήκες η ακολουθία συγκλίνει στη ρίζα της $f(x)$. ΔΛδ για αρκετά μεγάλα N η x_N είναι καλή προσέγγιση της ρίζας της f.

Συμβολισμός Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Συμβολίζουμε
$C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής} \}$

$C(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} : f$ να είναι n-φορές παραγωγίσιμη, $n \in \mathbb{N} \}$

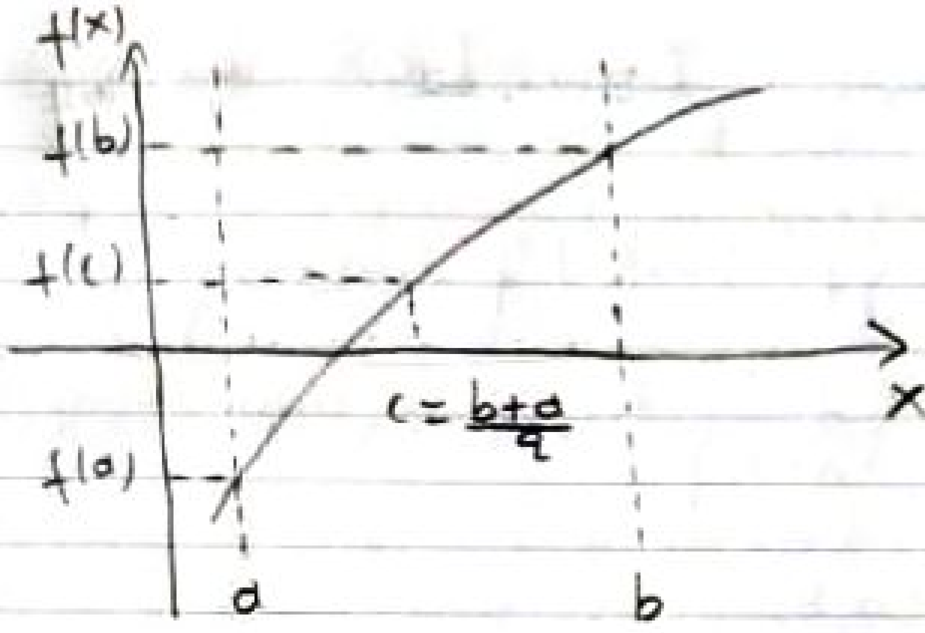
Αν $I = [a,b]$

Η μέθοδος της διχοτόμησης

Χαρακτηριστικά
- Οικονομικά υπολογιστικά
- Συγκλίνει πάντα αν είναι εφαρμόσιμη.
- Βασίζεται στο Θεώρημα μέσης τιμής.

Έστω $g \in C[a,b]$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a,b] : g(x) = \kappa$.

Βασική ιδέα Έστω $f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$. Τότε η $f(\cdot)$ έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον μια ρίζα



• Αν $f(c)=0 \Rightarrow c$ ρίζα της f

• $f(c) \neq 0$

– $f(a) \cdot f(c) < 0 \Rightarrow$ ρίζα $\in (a,c)$

αλλιώς $f(c)\, f(b) < 0 \Rightarrow$ ρίζα $\in (c,b)$

– Για $x^* \in [a,b]$

$$|x^*-c| = \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$$

<u>Βήματα του αλγορίθμου</u>

• Υπολογίζω το $f(a)$ και $\delta = b-a$

• $\delta/2 \rightarrow \delta$ (διχοτόμηση)

Αν $\delta \leq \varepsilon$ τυπώνω a, b. Έξοδος αλγορίθμου

Αλλιώς $(\delta > \varepsilon)$ $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$

• Αν $f(c)=0$ Έξοδος

Αλλιώς $\begin{cases} \text{αν } \operatorname{sign} f(a) = \operatorname{sign} f(c) \\ f(a) \rightarrow f(c) \\ a \rightarrow c \end{cases}$ ή τα ίδια για το b

• Επαναλαμβάνω από την αρχή.

$\boxed{\operatorname{sign} f(a) = \text{πρόσημο } f(a)}$

Υπολογιστικά ζητήματα

1. Το $\text{sign} f(a) = \text{sign} f(c)$ δεν τίθεται στην μορφή $f(a) f(c) > 0$. Το $f(a) f(c)$ μπορεί να οδηγήσει σε υπερχείλιση.
2. Το $c = \frac{b+a}{2}$ υπολογίζεται ως $c = a + \frac{b-a}{2}$

Αλλιώς το $\frac{b+a}{2}$ μπορεί να οδηγήσει σε σημείο εκτός του $[a,b]$.

3. Μικρή ή πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε οδηγεί σε φαύλο κύκλο.

Εκτίμηση του σφάλματος

Έστω $f \in C[a,b]$, $\text{sign} f(a) \neq \text{sign} f(b)$ και $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων. Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N είτε $x_n \to x^*$ $n \to \infty$ με x^* τη λύση της εξίσωσης και ισχύει
$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

<u>Απόδειξη</u> Θέτω $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$
Τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος x_i. Το μέσο του $[a_i, b_i]$. $\left(\begin{array}{l} a_1 = a \\ b_1 = b \end{array}\right)$

Τότε $I_{i+1} \subset I_i$. Επίσης σε κάθε I_i υπάρχει η ρίζα της $f(x)$ και προφανώς και το x^*.

— Αν βρούμε τη ρίζα ακριβώς το πλήθος I_i είναι πεπερασμένο.

Τελικά $x^* \in I_n \to x^* - x_n = x^* - \frac{b_n + a_n}{2} \Longrightarrow$
$|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$

και $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}}{2} = \cdots =$

$= \frac{b-a}{2^n}$

Συνεπώς $|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$

Για $\varepsilon > 0$ αρκεί $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \implies$

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}$$

Δίνει το πλήθος επαναλήψεων ώστε η x_n να διαφέρει από το x^* το πολύ ε.